

# Etude de la propagation d'une perturbation dans un réseau d'interaction formé par un système multi-agents

H. Rabai<sup>a</sup>  
haifa.rabai@univ-lehavre.fr

R. Charrier<sup>a</sup>  
rodolphe.charrier@univ-lehavre.fr

C. Bertelle<sup>a</sup>  
cyrille.bertelle@univ-lehavre.fr

<sup>a</sup>Université du Havre, France

## Résumé

*Nous étudions la propagation d'une perturbation dans un réseau d'interaction formé par un système multi-agents. Ce réseau est représenté par un graphe où les agents sont les noeuds et les interactions sont les arcs dirigés. La perturbation considérée ici est celle de l'état interne de l'agent qui est réduit à une variable réelle dépendant du temps. Cet état peut être "stable" ou "perturbé" selon la nature dynamique de cette variable. Nous supposons que le réseau d'interaction possède initialement un agent perturbé qui est une série temporelle chaotique. Notre objectif consiste à détecter l'ensemble des agents qui deviennent perturbés suite à l'interaction dans le réseau. Nous cherchons également à identifier la source de la perturbation dans le graphe à partir des séries temporelles des agents. Nous proposons alors un algorithme permettant de remonter à la source depuis un agent quelconque impacté par la perturbation. Nous présentons dans cet article les résultats des simulations effectuées pour tester cet algorithme.*

**Mots-clés :** Réseau d'interaction, agents chaotiques, Coupled Map Network, entropie de transfert

## Abstract

*We study the spread of a disturbance in an interaction network formed by a multi-agent system. This network is represented by a graph where the nodes are the agents and interactions are oriented edges. The disturbance considered here is related to the internal state of the agent and is reduced to a real time-dependent variable. This state can be "stable" or "disturbed". We assume that the interaction network initially contains only one disturbed agent that has chaotic time series. We aim to detect the agents that become disturbed due to the interaction in the network. We also seek to identify the source of the disturbance in the graph based on the agents time series. Therefore, we propose*

*an algorithm to search the source starting from any impacted node. We present here the results of our simulations to test this algorithm.*

**Keywords:** Interaction network, chaotic agents, Coupled Map Network, transfer entropy

## 1 Introduction

De nombreux problèmes de la diffusion d'information, de rumeurs, de maladies ou de virus qui ont pour environnement l'internet, les réseaux sociaux réels ou virtuels ou encore les réseaux de communications, sont modélisés par des graphes dans lesquels les noeuds représentent les agents et les arcs représentent l'interaction existant entre ces agents. D'autre part, les noeuds de ces graphes possèdent des états discrets ou continus qui peuvent être modifiés par le processus de diffusion existant au sein du graphe.

Parmi les modèles à base d'agents à états discrets, on peut citer certains modèles épidémiologiques où les noeuds peuvent avoir notamment l'un des états discrets suivants : "Susceptible", "Infected" ou "Recovered" [2]. Dong et al. [5] présentent un système multi-agent pour la modélisation des infections où les agents peuvent être soit susceptibles soit infectés. Le modèle permet de faire des prédictions utiles sur les probabilités de contracter des infections au sein d'une communauté.

De même, dans l'étude de la propagation des rumeurs, on retrouve généralement trois états qui sont : "Spreader", "Stiffler" et "Ignorant" [3]. Tang et al. [13] proposent un système multi-agent où les agents possèdent l'un de ces états pour étudier la propagation des rumeurs dans les réseaux sociaux.

Concernant les modèles à base d'agents à états continus, on peut citer en particulier le modèle de Deffuant et al. [4] car il est assez proche du notre dans sa conception. Dans ce modèle, les agents sont caractérisés par des variables d'opi-

nion continues ayant des valeurs entre -1 et 1. L'opinion d'un agent est générée à partir d'une fonction linéaire et change en fonction de sa distance par rapport à l'opinion d'un autre agent en interaction avec lui. Ainsi, dans ce modèle l'état d'une opinion  $x$  d'un agent évolue dans le temps en fonction de l'opinion  $y$  d'un autre agent :

$$x^{t+1} = x^t + \mu(y^t - x^t) \quad (1)$$

où  $\mu$  est le paramètre de convergence. Dans la même catégorie de modèle, on retrouve le modèle de Shannon et al. [14] qui étudient la propagation de l'anxiété dans un système multi-agent suite à la propagation d'une maladie. L'état des agents est ici une variable générée initialement aléatoirement entre 0 et 1, il change d'une part, en fonction de l'interaction avec les voisins et d'autre part, à la réception d'une excitation venant des médias à cause de la propagation d'une maladie.

Notre travail se rapproche des modélisations d'agents à états continus citées ci-dessus. Nous nous intéressons à l'analyse de la propagation d'une perturbation dans un réseau d'interaction formé par un système multi-agent : les noeuds sont les agents et les arcs représentent l'interaction entre deux agents. L'interaction ici est directement liée à la perception de l'agent : si un agent perçoit un autre agent, on considère qu'il est en interaction avec lui et cette interaction est représentée dans le graphe par un arc. La perturbation considérée ici est celle de l'état interne de l'agent qui est réduit à une variable réelle dépendant du temps. L'état interne de l'agent peut être considérée comme une information (rumeur,...) mais à ce stade de modélisation, il demeure une grandeur abstraite. A l'instar du modèle de Deffuant, l'état d'un agent est une grandeur continue  $x$  dépendant du temps. Dans notre modèle, cet état peut être "stable" ou "perturbé" selon la nature de son évolution dynamique. Toutefois, cette évolution est gouvernée par une fonction non linéaire contrairement à la fonction linéaire de Deffuant (cf. section 2).

La situation que nous étudions est la suivante : nous supposons que le réseau d'interaction de notre système-agent possède initialement un seul agent perturbé. Notre objectif consiste alors dans un premier temps à détecter l'ensemble des agents qui deviennent perturbés suite à l'interaction dans le réseau sur un temps suffisamment long. Puis dans un second temps, il s'agit d'identifier la source de la propagation de la perturbation dans le graphe.

Pour réaliser notre objectif final, nous allons

procéder en deux phases : une première phase correspondant au problème direct qui va calculer l'évolution dynamique du réseau d'une façon contrôlée au moyen d'un modèle de calcul appelée réseau d'itérations couplées ("Coupled Map Network"). Puis dans une deuxième phase correspondant au problème inverse, nous cherchons à analyser le réseau uniquement à partir de la dynamique des états internes des agents générés dans la première phase. Dans cette seconde phase, nous cherchons à retrouver l'ensemble des noeuds impactés par la perturbation ainsi que la source de cette propagation.

Cette recherche est rendue possible par l'utilisation des mesures basées sur l'entropie de Shannon. Concernant l'identification de la source de la perturbation dans le réseau, nous utilisons l'entropie de transfert [12] et nous proposons un algorithme de recherche qui se base sur cette mesure et permet de remonter à la source à partir d'un agent quelconque de l'ensemble des agents impactés par la propagation. Notre algorithme de recherche dépend de deux paramètres et nous présentons dans cet article les simulations effectuées pour tester cet algorithme et étudier l'influence de ces paramètres sur le taux de réussite de la détection de la source.

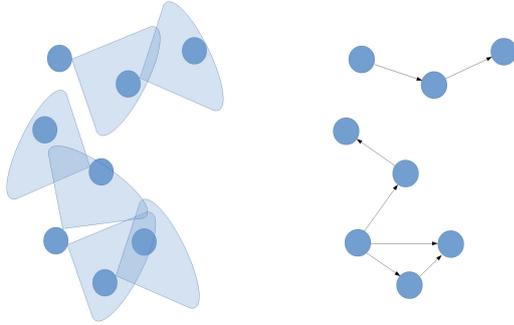
Dans cet article, nous montrons dans une première section comment on construit le réseau d'interaction à partir du système multi-agent qui est la base de l'étude. Dans une section suivante, nous présentons le modèle de calcul du réseau d'itérations couplées (CMN) [7]. Puis les sections suivantes concerneront le problème inverse et les simulations effectuées, notamment, nous proposons un algorithme de détection de la source de la perturbation. Pour conclure, nous discutons des résultats et présentons les perspectives de ce modèle à des problématiques plus concrètes.

## 2 Réseau et modèle d'interaction

### 2.1 Construction du réseau d'interaction

Le système multi-agent que nous étudions est formé par un nombre  $n$  d'agents immobiles qui sont situés dans un environnement spatial (que nous assimilons à un espace à deux dimensions carré, par conséquent, limité). Chaque agent possède une position dans l'environnement et une perception limitée sur l'environnement et sur les autres agents. Cette perception limitée est modélisée par un cône d'angle égal à  $120^\circ$  inspiré du cône de la perception visuelle humaine et d'un rayon proportionnel à la taille de l'envi-

ronnement (environ 10%). Ces valeurs ne sont qu'indicatives à ce niveau du modèle car elles ne servent qu'à générer le réseau d'interaction qui est la base de départ de notre modèle. Ainsi,



(a) Système multi-agents (b) Réseau d'interaction

FIGURE 1 – Réseau de perception assimilé au réseau d'interaction potentielle des agents.

cette configuration du système multi-agent permet de construire le graphe d'interaction comme suit : comme on l'a indiqué dans l'introduction, nous définissons l'interaction comme un lien de perception entre les agents, par conséquent, la construction du graphe se déroule comme suit : Si un agent  $k$  perçoit un autre agent  $l$  et donc, est en interaction avec lui (en réalité l'agent  $k$  est de cette manière influencé par l'agent  $l$ ), nous créons un arc dirigé du noeud  $X_k$  vers le noeud  $X_l$  (cf. figure 1). Dans toute la suite de cet article, nous désignerons noeud  $k$  et agent  $k$  par la même variable  $X_k$ . Au final, nous obtenons ainsi un réseau d'interaction dynamique et orienté :

- L'ensemble des agents / noeuds  $V = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  est associé aux variables d'état mesurables  $X^t = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t)$ .
- L'ensemble des arcs  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  définit les interactions entre les noeuds, où  $m$  est le nombre d'arcs existants entre les noeuds.

Les états des agents évoluent en fonction des interactions d'une part et en fonction d'une application non linéaire. L'ensemble constitue le modèle de calcul de réseau d'itérations couplées que nous explicitons dans la section suivante.

## 2.2 Réseau d'itérations couplées

Comme il a été dit dans l'introduction, nous proposons de modéliser la dynamique du réseau d'interaction par un réseau d'itérations couplées

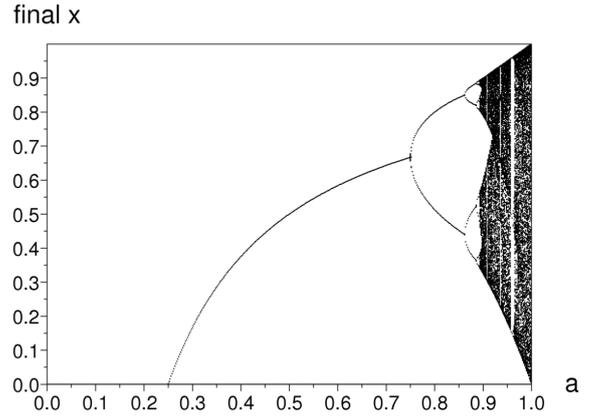


FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation de l'application logistique.

connu dans la littérature comme un modèle d'oscillateurs non linéaires couplés (CMN [7]) à temps discret.

Au préalable, nous avons à expliquer plus précisément l'utilisation d'une application non linéaire pour générer l'évolution temporelle des états des agents individuels puis préciser la notion d'interaction dans le système multi-agent. Tout d'abord, nous définissons un état stable pour un agent comme un état dont les valeurs sont constantes dans le temps (point fixe) ou périodiques. D'autre part, nous définissons un état perturbé comme une variable temporelle prenant des valeurs aléatoires au cours du temps. Dans le cadre de notre modèle de calcul d'itérations couplées, ces deux caractéristiques distinctes vont pouvoir être générées par une seule et même application déterministe paramétrée monodimensionnelle et non linéaire.

L'état  $x_k$  d'un agent / noeud quelconque  $X_k$  généré par cette application non linéaire est donné pour tout instant  $t$  par l'équation suivante :

$$x_k^{t+1} = f(x_k^t, a_k) = 4 a_k x_k^t (1 - x_k^t) \quad (2)$$

où  $a_k$  est appelé paramètre de contrôle de cette application. Cette application est connue sous le nom d'application logistique. Elle est non linéaire puisque générée par un polynôme de degré 2 en  $x$ . D'autre part, les grandeurs  $a$  et  $x$  prennent leur valeur dans  $[0, 1]$ .

Cette application non linéaire a de nombreuses propriétés dynamiques en fonction de son paramètre de contrôle  $a$  : les séries temporelles générées sont résumées dans le diagramme de bifurcation de la figure 2. Ce diagramme s'interprète en partant de la gauche ( $a = 0$ ) vers la droite (jusqu'à  $a = 1$ ) avec en ordonnée, les différentes va-

leurs obtenues pour  $x$  après une centaine d'itérations (ou plus) de la suite (2) :

- Pour  $a$  de 0 à 0,25, on a une valeur finale de  $x$  nulle.
- Pour  $a$  de 0,25 à 0,75, on a une valeur finale de  $x$  constante mais non nulle.
- Pour  $a$  de 0,75 à 0,89, on observe des dédoublements successifs de la courbe initiale indiquant des cycles périodiques de périodes de plus en plus grandes.
- Au delà, on peut observer un mélange de cycles périodiques et non périodiques (correspondant aux bandes sombres).
- Pour  $a = 1$ , on a un seul trait noir couvrant tout l'intervalle  $[0, 1]$  pour lequel la série obtenue bien que déterministe, est pseudo-aléatoire. Ce comportement dynamique est appelé chaos déterministe.

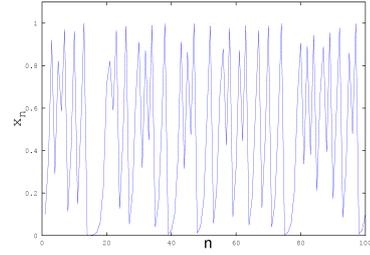
Le choix de l'application logistique est justifiée, entre autres, par la grande variété de comportements dynamiques qu'on peut générer et qui dépendent de la valeur de son unique paramètre  $a$ . En effet, un état stable sera généré pour des valeurs de  $a$  inférieures à 0,89. D'autre part, un état perturbé correspondra à une valeur de  $a = 1$  générant une série chaotique. Dans la suite du document, nous appellerons l'agent dont l'état est chaotique un agent perturbé ou un agent chaotique.

Explicitons maintenant comment notre modèle de calcul d'itérations couplées prend en compte l'interaction entre les agents. Comme son nom l'indique, il réalise cette interaction par un couplage mathématique entre les états des agents. La force de cette interaction est quantifiée par un coefficient de couplage  $\epsilon$  qui prend ses valeurs entre 0 et 1 et qui a une valeur uniforme pour tous les agents dans les simulations présentées. Mais rien n'interdit que ce coefficient puisse être spécifique à chaque agent dans une évolution de notre modèle. Ce couplage mathématique s'exprime au travers de l'équation générale d'évolution de l'état  $x_k$  de l'agent  $X_k$  suivante :

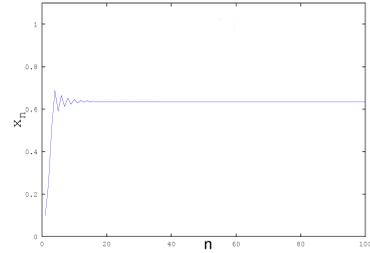
$$x_k^{t+1} = (1 - \epsilon)f(x_k^t, a_k) + \frac{\epsilon}{N_l} \sum_{l=1}^{N_l} f(x_l^t, a_l) \quad (3)$$

où  $\epsilon$  est le coefficient de couplage.  $N_l$  représente l'ensemble des agents perçus par l'agent  $X_k$ .  $l$  sont les indices des agents avec lesquels  $X_k$  est en interaction. Le calcul des états des agents se fait d'une façon synchrone sur l'ensemble du réseau.

Ce modèle est connu dans la littérature pour générer une synchronisation des états des noeuds (c'est à dire que tous les noeuds ont la même



(a) Etat perturbé. La série temporelle est générée avec  $a = 1$ .



(b) Etat stable. La série temporelle est générée avec  $a = 0.68$ .

FIGURE 3 – Exemples d'états.

série temporelle au bout d'un certain temps) lorsque le graphe est complet et l'interaction est suffisamment forte (y compris pour des séries temporelles chaotiques). Dans le cas qui nous intéresse, les synchronisations ne sont que partielles et devraient s'affaiblir avec la taille du réseau.

Ce modèle permet dans cette première phase de générer toutes les séries temporelles des noeuds du graphe et par construction, nous pouvons déduire quel est le sous graphe d'agents impactés par la propagation (c'est à dire le couplage ici) sous l'influence d'un seul agent chaotique. Nous avons à présent tous les éléments pour aborder tout le problème inverse c'est à dire l'étude et la recherche du sous graphe de ces agents impactés à partir des seules séries temporelles obtenues du réseau d'itérations couplées présenté précédemment. Il est en effet difficile de déterminer la nature chaotique d'une série de donnée expérimentale ce qui nécessite des outils de mesures adaptées à ce type de série. La section suivante présente le traitement du problème inverse.

### 3 Analyse du problème inverse

#### 3.1 Détection du groupe d'agents perturbés

Afin de caractériser les propriétés dynamiques des séries temporelles des agents, nous avons besoin d'une mesure qui peut détecter la nature chaotique d'un signal. Par conséquent,

nous proposons d'utiliser l'entropie de Shannon qu'on calcule à partir des diagrammes de proche-retour [8]. Des travaux récents ont montré que l'entropie de Shannon est une mesure efficace pour détecter des séries temporelles chaotiques [9]. Nous allons utiliser cette mesure pour identifier l'ensemble des agents perturbés.

Un diagramme de proche-retour est obtenu d'une matrice  $T \times T$   $R(i, j)$  construite comme suit. Soit  $x_k$  la série temporelle d'un agent donné  $X_k$ . Le principe consiste à comparer cette série temporelle à chaque pas de temps  $i$  à elle-même avec un délai  $j$ .  $T$  correspond à la taille de l'échantillon pris d'une série temporelle.

$$R_{X_k}(i, j) = \theta(\delta - |x_k^i - x_k^{i+j}|) \quad (4)$$

où  $\theta(x_i)$  est la fonction de Heaviside : si  $\delta - |x_k^i - x_k^{i+j}| > 0$  alors  $\theta = 1$  sinon  $\theta = 0$ .

Si la différence  $x_k^i - x_k^{i+j}$  est inférieure à un certain seuil  $\delta$ ,  $x_k^i$  et  $x_k^{i+j}$  sont dits récurrents et sont représentés par 1 dans la matrice. Sinon, ils sont considérés comme non récurrents et 0 est placé dans  $(i, j)$ . Un exemple de diagramme de proche-retour est illustré sur la figure 4. Les segments noirs de ce diagramme correspondent aux points récurrents et inversement, les segments de couleur blanche sont les points non récurrents.

Le seuil  $\delta$  permet de discrétiser les données et détermine la structure des diagrammes de proche-retour. Il est calculé comme suit :

$$\delta = (|\min_{k=1..n}(x_k^t) - \max_{k=1..n}(x_k^t)|)\alpha \quad (5)$$

où  $\min$  et  $\max$  sont respectivement les valeurs minimales et maximales calculées sur toutes les valeurs des séries temporelles des agents. Différentes règles [11] ont été proposées pour la définition du seuil  $\delta$  dont la plus utilisée consiste à choisir un paramètre  $\alpha$  égal à 10%. Les valeurs des séries temporelles de nos agents étant comprises entre 0 et 1, nous définissons par conséquent un seuil global pour tous les agents.  $\delta$  aura donc les valeurs suivantes : 0,1, 0,01 et 0,001.

Des mesures ont été proposées pour interpréter les représentations graphiques des diagrammes de proche-retour en analyses statistiques. Parmi ces mesures, on cite le taux de récurrence et l'entropie de Shannon. Le taux de récurrence est défini comme la somme des points récurrents dans les diagrammes de proche-retour divisée par le nombre total d'éléments dans la matrice :

$$RR_{X_k} = \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T R_{X_k}(i, j) \quad (6)$$

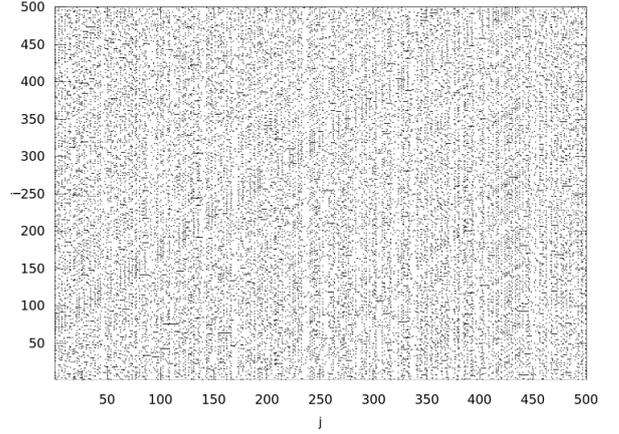


FIGURE 4 – Diagramme de proche-retour.

L'entropie de Shannon est définie par :

$$S = - \sum_{g=1}^H P_g \log(P_g) \quad (7)$$

où  $P_g$  est la probabilité d'observer un segment non récurrent de longueur  $g$ , qui est le nombre de segments horizontaux de points non récurrents de longueur  $g > 0$  divisé par le nombre total de segments de points non récurrents [10].  $H$  est la séquence d'éléments récurrents la plus longue.

L'entropie est positive quand l'état de l'agent est perturbé, elle croît au fur et à mesure que la série temporelle est impactée par le chaos.

### 3.2 Identification de la source de la perturbation

L'entropie de Shannon permet d'identifier le groupe d'agents perturbés. Nous utilisons cet ensemble pour retrouver la source de la perturbation depuis un noeud perturbé quelconque. Rappelons que nous disposons uniquement des séries temporelles des agents perturbés et que nous ignorons les interactions entre eux. Par conséquent, afin de retrouver la source, on doit pouvoir calculer à partir des séries temporelles l'information chaotique transmise par les agents. Pour y parvenir, nous proposons d'utiliser l'entropie de transfert (TE) qui est une mesure de la théorie de l'information développée par Thomas Schreiber [12]. Elle permet d'identifier la direction de couplage entre deux systèmes dynamiques.

Soient  $X_l$  et  $X_k$  deux noeuds, l'information

transmise de  $X_k$  vers  $X_l$  est donnée par :

$$\text{TE}_{X_k \rightarrow X_l} = \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^T p(x_l^{i+1}, x_l^i, x_k^j) \log\left(\frac{p(x_l^{i+1}|x_l^i, x_k^j)}{p(x_l^{i+1}|x_l^i)}\right) \quad (8)$$

où  $p(\cdot)$  et  $p(\cdot|\cdot)$  sont respectivement les probabilités conjointe et conditionnelle. Il s'agit de rechercher toutes les combinaisons possibles de  $(x_l^{i+1}, x_l^i, x_k^j)$  dans les deux diagrammes de proche-retour relatifs aux noeuds  $X_k$  et  $X_l$ .

Pour connaître les directions de couplage entre deux systèmes, nous avons besoin de calculer à la fois  $\text{TE}_{X_l \rightarrow X_k}$  et  $\text{TE}_{X_k \rightarrow X_l}$ . Si  $\text{TE}_{X_l \rightarrow X_k} > \text{TE}_{X_k \rightarrow X_l}$ , alors  $X_l$  est le noeud qui a transmis une partie de son état à  $X_k$ .

Souvent, l'entropie de transfert est calculée sur des données discrétisées. Nous proposons ici d'utiliser les diagrammes de proche-retour présentés précédemment (cf. équation (4)) pour calculer cette mesure.

Ci-dessous, nous donnons les principales étapes du processus de la recherche de la source :

1. Choisir aléatoirement un noeud  $X_l$  de l'ensemble des noeuds chaotiques  $N_c$ .
2. Rechercher l'entropie de transfert la plus élevée entre ce noeud et tous les autres noeuds chaotiques.
3. L'entropie de transfert maximale nous donne le noeud  $X_k$  à traiter. Ce noeud est considéré comme celui qui influence le plus  $X_l$ .  
Refaire l'étape 2 en partant du noeud  $X_k$ .
4. La boucle précédente se termine lorsque nous ne trouvons pas un noeud qui influence  $X_l$ . Par conséquent, ce noeud est considéré comme la source  $X_s$  de la perturbation.

L'algorithme de détection de la source de la perturbation dépend de deux paramètres qui sont respectivement,  $\epsilon$  le coefficient de couplage assimilé à une "force d'interaction" entre les agents et  $\delta$  le seuil de construction des diagrammes de proche-retour. Nous allons étudier l'influence de ces paramètres sur le taux de réussite de notre algorithme.

### 3.3 Simulations

Notre objectif consiste à détecter le groupe d'agents perturbés et à identifier la source de la perturbation dans le réseau d'interaction. Pour ce faire, nous avons simulé 10 graphes aléatoires

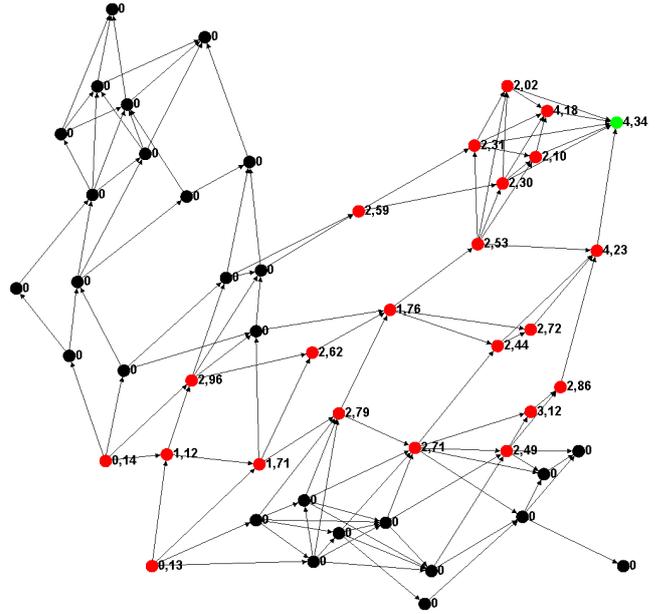


FIGURE 5 – Valeurs de l'entropie de Shannon. Les noeuds impactés par la perturbation sont colorés en rouge. Le noeud source de cette perturbation est coloré en vert.

construits à partir de systèmes multi-agents différents. Ces graphes ont des structures différentes et sont formés par 50 noeuds / agents ayant des indices de 0 à 49. Chaque graphe possède initialement un agent perturbé / chaotique qui est susceptible d'impacter d'autres agents en interaction avec lui d'une manière directe ou indirecte. Il est à noter que l'agent chaotique n'est jamais influencé par les autres agents avec qui il interagit.

D'abord, nous avons utilisé le CMN pour générer les séries temporelles des noeuds. Dans ce modèle, nous connaissons les états des noeuds, notamment la source de la perturbation, ainsi que la structure des graphes.

Dans le problème inverse, nous cherchons à construire le CMN à partir uniquement des séries temporelles des noeuds. Dans les réseaux d'interaction, nous ne connaissons ni l'état des noeuds ni les interactions entre eux.

Pour tester l'algorithme de détection, nous allons étudier l'impact des paramètres  $\epsilon$  et  $\delta$ .

La force d'interaction  $\epsilon$  est supposée influencer l'étendue de la propagation et le degré de la perturbation des états. Par ailleurs, un couplage fort conduit à un phénomène de synchronisation.

Pour confirmer ces hypothèses, nous avons varié la force de couplage  $\epsilon$  dans nos simulations de 0,05 à 1.

Le seuil  $\delta$ , quant à lui, détermine la structure des

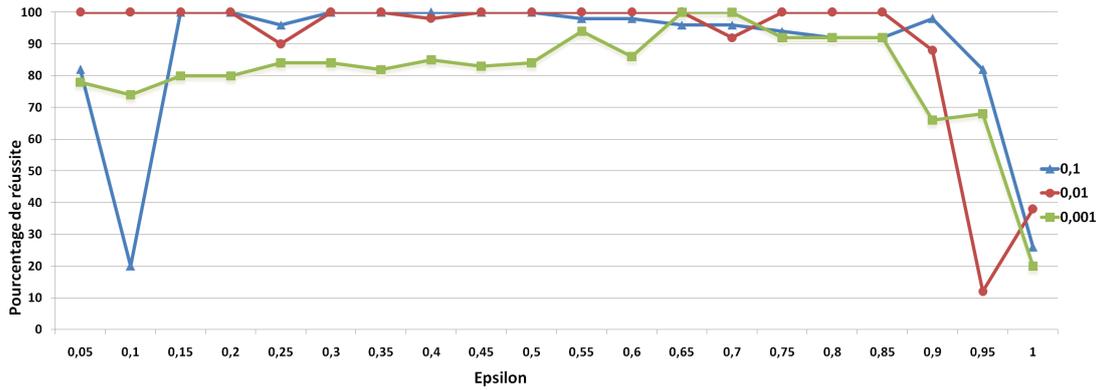


FIGURE 6 – Pourcentages de réussite de l’algorithme en fonction du seuil  $\delta$  et pour toutes les valeurs d’epsilon.

diagrammes de proche-retour. Plus le seuil est grand, plus les matrices contiennent des points récurrents. Il est donc intéressant d’élargir le seuil pour voir son impact sur la détection de la source. Par conséquent,  $\delta$  aura les valeurs suivantes : 0,1, 0,01 et 0,001.

Pour la recherche de la source, nous avons choisi aléatoirement 5 agents de départ.

La figure 5 montre un exemple de graphe. Nous utiliserons cet exemple pour appliquer nos mesures. Puis, nous présenterons les résultats des simulations sur les 10 graphes pour en déduire les meilleures valeurs des paramètres de notre algorithme.

### 3.4 Résultats

Pour détecter l’ensemble des noeuds chaotiques, nous avons construit les diagrammes de proche-retour relatifs à chaque agent en utilisant différents seuils  $\delta$ . Les séries temporelles étudiées sont obtenues après 1000 pas de de simulation. Ensuite, nous avons calculé l’entropie de Shannon (cf. équation (7)). Les agents ayant une entropie de Shannon positive sont considérés comme perturbés. Il est à noter que le nombre d’agents impactés croît quand on augmente la force de couplage  $\epsilon$ .

Nous présentons sur la figure 5 les valeurs de l’entropie pour la configuration suivante :  $\delta = 0,01$  et  $\epsilon = 0,75$ . Les noeuds chaotiques sont colorés en rouge et en vert. Ce résultat correspond à la configuration du CMN.

Ayant identifié le sous-groupe d’agents chaotiques, nous cherchons maintenant à retrouver la source de la propagation. Pour y parvenir, nous avons d’abord calculé l’entropie de transfert à partir des diagrammes de proche-retour entre chaque couple d’agents perturbés / chaotiques

(cf. équations (8) et (4)).

Il y a 2 configurations de couplage entre deux noeuds :

- Si  $TE_{X_l \rightarrow X_k}$  et  $TE_{X_k \rightarrow X_l}$  sont des valeurs faibles, alors,  $X_l$  et  $X_k$  ne sont pas en interaction. On considère qu’une valeur est faible, si elle est inférieure à 0,0001.
- Si  $TE_{X_l \rightarrow X_k} > TE_{X_k \rightarrow X_l}$ , alors,  $X_l$  influence  $X_k$  et est plus proche de la source du chaos.

Pour expliquer notre algorithme, nous présentons quelques résultats dans le tableau 1. Les valeurs de l’entropie dans ce tableau nous permettent de retrouver la source en partant du noeud 48.

La première ligne ainsi que la première colonne du tableau correspondent aux indices de quelques agents perturbés. Une cellule correspond à  $TE_{X_k \rightarrow X_l}$ .

D’abord nous calculons les entropies de transfert entre ce noeud et les autres noeuds perturbés. L’entropie de transfert maximale trouvée est celle entre le noeud 48 et le noeud 3 :  $TE_{3 \rightarrow 48}$ . Ensuite, nous comparons  $TE_{3 \rightarrow 48}$  et  $TE_{48 \rightarrow 3}$ . Si 3 n’influence pas le noeud 48, nous le supprimons de notre recherche et choisissons une autre entropie maximale. Cette comparaison nous amène à conclure que le noeud 3 influence le noeud 48. Nous recommençons la procédure en partant cette fois-ci du noeud 3. Le calcul de l’entropie de transfert nous mène au noeud 15 qui nous mène au noeud 2. Ce dernier nous amène à considérer le noeud 41. Nous calculons l’entropie entre le noeud 41 et les autres noeuds identifiés comme perturbés. Il s’avère qu’il n’y a aucun noeud qui influence l’agent 41. Par conséquent, cet agent est considéré comme la source de la perturbation dans le réseau et est coloré en vert sur la figure 5.

	2	3	4	12	15	29	35	41	48
2		0,015	$2,72e^{-4}$	$9,33e^{-5}$	0,044	$6,95e^{-9}$	0,016	$5,32e^{-4}$	$8,28e^{-4}$
3	0,0012		$1,08e^{-4}$	0,0014	$7,30e^{-4}$	0,020	0,004	$8,40e^{-5}$	0,35
4	0,011	0,013		$7,97e^{-5}$	0,037	$5,05e^{-5}$	0,016	$8,65e^{-4}$	$4,78e^{-4}$
12	$1,47e^{-6}$	$1,42e^{-5}$	$2,54e^{-6}$		$5,69e^{-5}$	$8,97e^{-4}$	$2,54e^{-5}$	$1,18e^{-7}$	$3,35e^{-4}$
15	0,001	0,045	$1,04e^{-4}$	$4,39e^{-4}$		0,003	0,012	$9,61e^{-5}$	0,071
29	$1,39e^{-5}$	$1,18e^{-4}$	$1,45e^{-5}$	0,004	$5,84e^{-5}$		$4,45e^{-4}$	$2,08e^{-5}$	$1,40e^{-4}$
35	$2,58e^{-4}$	0,009	$4,29e^{-6}$	$4,40e^{-4}$	$9,27e^{-5}$	0,008		$6,36e^{-6}$	0,143
41	0,014	0,010	0,0035	$6,11e^{-5}$	0,023	$3,97e^{-6}$	0,013		$3,58e^{-4}$
48	$9,54e^{-6}$	$3,05e^{-4}$	$3,11e^{-6}$	0,0027	$1,02e^{-4}$	0,341	0,002	$4,18e^{-7}$	

TABLE 1 – Valeurs de l’entropie de transfert. La première ligne et la première colonne contiennent les indices des agents perturbés. L’entropie de transfert maximale calculée à chaque étape du processus de détection est colorée en rouge.

**Impact des paramètres  $\delta$  et  $\epsilon$  sur la détection de la source.** Pour les 10 graphes étudiés, nous avons repris les valeurs de  $\delta$  présentées dans la section Simulations et nous avons varié la valeur du coefficient de couplage de 0,05 à 1. Nous rapportons les pourcentages de réussite de notre algorithme sur la figure 6.

La figure 6 montre que le pourcentage de réussite diminue quand on élargit le seuil ( $\delta = 0,001$ ). Ce résultat s’explique par le fait que lorsqu’on agrandit le seuil (on diminue sa valeur), on fait apparaître plus de segments récurrents dans les matrices de proche-retour. Or, nous cherchons à détecter l’influence chaotique des noeuds ce qui correspond aux segments non récurrents. Ce résultat est confirmé dans le tableau 2 où on a les moyennes des pourcentages d’erreur  $E_1$  de l’algorithme, en fonction du paramètre  $\delta$ , calculés pour toutes les valeurs d’epsilon.

$\delta$	0,1	0,01	0,001
$E_1$	12	9	18

TABLE 2 – Pourcentages d’erreur selon la valeur du seuil  $\delta$ .

Concernant le paramètre  $\epsilon$ , à partir d’un couplage fort, c’est à dire un coefficient de couplage supérieur à 0,85, l’algorithme n’arrive plus à détecter la source. Nous allons tenter d’expliquer cet échec en se fondant sur les taux de récurrence des noeuds identifiés par erreur comme sources du chaos.

La figure 7 montre l’évolution des taux de récurrence en fonction du paramètre  $\epsilon$  de l’agent source 41 et d’un autre agent 4 qui est en interaction directe avec lui. Quand le couplage est

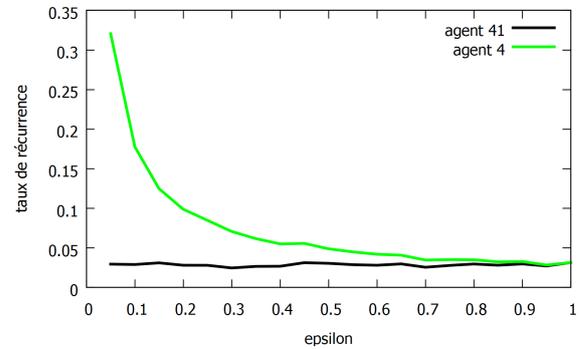


FIGURE 7 – Evolution des taux de récurrence des agents 4 et 41 en fonction de la force de couplage.

fort, les taux de récurrence deviennent presque identiques. Cela s’explique par un phénomène de synchronisation qui permet à deux états initialement différents de devenir identiques.

En nous basant sur les résultats de ces études, nous pouvons conclure que la meilleure calibration des paramètres de notre algorithme correspond à un seuil  $\delta$  égal à 0,01 et une force d’interaction  $\epsilon$  inférieure à 0,9.

**Impact de la distance sur la détection de la source.** Les agents détectés par erreur comme noeuds sources sont majoritairement en interaction avec l’agent chaotique. Nous cherchons à connaître l’impact de la distance des noeuds par rapport à l’agent source sur le taux d’erreur  $E_2$  de notre algorithme. Ce taux devient alors proportionnel à la distance et est calculé comme

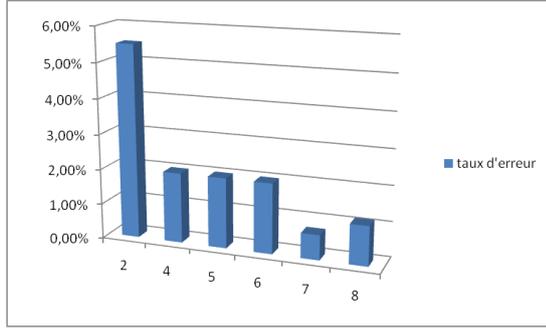


FIGURE 8 – Répartition du pourcentage d'erreur en fonction de D pour  $\delta$  égal à 0,01.

suit :

$$E_2 = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^M d_k \quad (9)$$

où  $d_k$  est la distance qui sépare un noeud  $X_k$  du noeud chaotique,  $X_c$ , étant un noeud identifié par erreur comme source.  $M$  représente l'ensemble des noeuds identifiés par erreur comme sources par l'algorithme.  $D$  est la distance maximale qui existe entre un noeud perturbé et l'agent source, elle est donnée par :

$$D = \max \{d(X_s, k) | k \in N_c\} \quad (10)$$

où  $X_s$  est le noeud source et  $N_c$  représente l'ensemble des noeuds perturbés.

$\delta$	0,1	0,01	0,001
$E_2$	3,1	2,1	5

TABLE 3 – Pourcentages d'erreur proportionnels à la distance au noeud source.

Le tableau 3 montre que la position des noeuds par rapport au noeud source impacte les résultats de notre algorithme.

Nous avons étudié l'impact de la distance maximale D sur la détection de la source dans le réseau d'interaction. Nous présentons sur la figure 8 les moyennes des pourcentages d'erreur en fonction de la distance D pour les 10 graphes étudiés. Ces pourcentages sont calculés pour un  $\delta$  égal à 0,01 et pour toutes les valeurs d'epsilon. Quand l'étendue de la propagation de la perturbation est importante, on a moins d'erreur de détection.

### 3.5 Discussion

Le calcul de l'entropie de Shannon à partir des diagrammes de proche-retour a permis de détecter le groupe d'agents perturbés. Quand on augmente la force d'interaction, le nombre d'agents impactés par la perturbation augmente également.

En ce qui concerne la source de la perturbation, nous avons proposé un algorithme de détection qui dépend de deux paramètres :  $\delta$  pour la construction des diagrammes de proche-retour et  $\epsilon$  la force d'interaction.

Une première étude a montré que lorsqu'on élargit le seuil  $\delta$ , le taux d'erreur relatif à la détection de la source augmente.

Nous avons également étudié l'impact du paramètre  $\epsilon$  sur la détection de la source. Quand on a un couplage fort, on n'arrive plus à détecter la source. Ceci est dû au phénomène de synchronisation qui permet à deux états initialement différents de devenir identiques.

Enfin, nous avons étudié l'impact de la distance des noeuds identifiés par erreur comme sources de la perturbation. La position de ces noeuds influence la recherche de la source puisque les agents se trouvent majoritairement à proximité de l'agent chaotique. Aussi, plus l'étendue de la propagation est importante, moins on a d'erreurs de détection.

Toutes ces études nous ont permis de trouver la meilleure calibration des paramètres de notre algorithme pour réduire les erreurs de détection : il faut fixer la valeur de  $\delta$  à 0,01 et assigner à  $\epsilon$  une valeur inférieure à 0,9.

## 4 Intérêt de l'étude et perspectives

Nous envisageons d'appliquer notre modèle de propagation de perturbations au problème de la propagation du stress ou de l'anxiété dans les situations d'urgence.

Des psychiatres et neurologues se sont intéressés à l'anxiété et au stress en étudiant la dynamique des rythmes cardiaques et des fréquences respiratoires d'un groupe de patients souffrant de trouble de panique (panic disorder). Ils ont conclu que ces dynamiques étaient chaotiques dû à l'anxiété [1]. D'un autre côté, Shannon et al. [14] considèrent l'anxiété comme une contagion émotionnelle qui se propage d'un individu à un autre au sein du réseau social.

En se basant sur ces études, nous pouvons assimiler l'anxiété aux données physiologiques chaotiques des personnes qu'on obtiendrait grâce aux capteurs sur ces derniers. L'état per-

turbé des agents correspondrait donc aux données physiologiques dont la dynamique est chaotique.

De même, la grandeur d'état de notre modèle pourrait correspondre au paramètre de nervosité du modèle des forces sociales de Helbing [6]. Ce modèle particulier prend en compte les situations d'urgence dans lesquelles la transition entre un comportement "rationnel" et un comportement "irrationnel" de panique est gérée par un seul paramètre appelé nervosité. Ce paramètre agit sur les décisions de déplacement du piéton.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté notre travail de recherche qui consiste à étudier la propagation d'une perturbation dans un réseau d'interaction formé par un système multi-agents basé sur un modèle de propagation de type CMN.

L'entropie de Shannon, calculée sur les diagrammes de proche-retour, s'est avérée une mesure efficace pour la détection du groupe d'agents perturbés. Nous nous sommes aussi intéressés à la détection de l'agent source de la perturbation en proposant un algorithme qui utilise l'entropie de transfert calculée sur les diagrammes de proche-retour pour mesurer l'information chaotique transmise d'un agent vers un autre.

Les simulations effectuées nous ont permis de trouver les meilleures valeurs des paramètres de notre algorithme dans le but de minimiser le taux d'erreur de la détection de la source.

Une des perspectives de nos travaux est d'étudier l'effet de la position et du nombre des noeuds sources ainsi que des topologies sur la propagation de la perturbation dans les réseaux d'interaction.

## Références

- [1] Daniela Caldirola, Laura Bellodi, Andrea Caumo, Giovanni Migliarese, and Giampaolo Perna. Approximate entropy of respiratory patterns in panic disorder. *The American journal of psychiatry*, 161(1) :79–87, 2004.
- [2] R. M. Christley, G. L. Pinchbeck, R. G. Bowers, D. Clancy, N. P. French, R. Bennett, and J. Turner. Infection in Social Networks : Using Network Analysis to Identify High-Risk Individuals. *Am J Epidemiol*, 162(10) :1024–1031, September 2005.
- [3] Elizabeth M. Daly and Mads Haahr. Social network analysis for routing in disconnected delay-tolerant manets. In *Proceedings of the 8th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing*, MobiHoc '07, pages 32–40, New York, NY, USA, 2007. ACM.
- [4] Guillaume Deffuant, David Neau, Frédéric Amblard, and Gérard Weisbuch. Mixing beliefs among interacting agents. *Adv. Complex Syst.*, 3(1–4) :87–98, 2000.
- [5] Wen Dong, Katherine A. Heller, and Alex Pentland. Modeling infection with multi-agent dynamics. *CoRR*, abs/1204.0168, 2012.
- [6] D. Helbing, I. Farkas, P. Molnàr, and T. Vicsek. Simulation of pedestrian crowds in normal and evacuation situations. In M. Schreckenberg and S. D. Sharma, editors, *Pedestrian and Evacuation Dynamics*, pages 21–58, Berlin, 2002. Springer.
- [7] Jose Koiller and Lai-Sang Young. Coupled map networks. *Nonlinearity*, 23(5) :1121, 2010.
- [8] Gabriel B. Mindlin and R. Gilmore. Topological analysis and synthesis of chaotic time series. *Phys. D*, 58(1-4) :229–242, September 1992.
- [9] Haifa Rabai, Rodolphe Charrier, and Cyrille Bertelle. Close returns plots for detecting a chaotic source in an interaction network. In *ALIFE 14 : The Fourteenth Conference on the Synthesis and Simulation of Living Systems*, volume 14, pages 726–733, 2014.
- [10] H Rabarimanantsoa, L Achour, C Letellier, a Cuvelier, and J-F Muir. Recurrence plots and Shannon entropy for a dynamical analysis of asynchronisms in noninvasive mechanical ventilation. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, 17(1) :013115, March 2007.
- [11] S Schinkel, O Dimigen, and N Marwan. Selection of recurrence threshold for signal detection. *53* :45–53, 2008.
- [12] T. Schreiber. Measuring information transfer. *Physical review letters*, 85(2) :461–464, 2000.
- [13] Mingsheng Tang, Xinjun Mao, Zahia Guessoum, and Huiping Zhou. Rumor Diffusion in an Interests-Based Dynamic Social Network. 2013, 2013.

- [14] James M Wilson, Shannon M Fast, Marta C Gonza, and Natasha Markuzon. Modelling the propagation of social response during a disease outbreak. 2015.